الدوال الأصلية

أهداف الدرس

- ❖ تعرف الدوال الأصلية لدالة متصلة على مجال.
- ❖ تعرف الدالة الأصلية لدالة على مجال التي تحقق الشرط البدئي .

القدرات المنتظرة

- ❖ تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية.
- ❖ استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية لدالة على مجال.

الامتدادات

- ❖ الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية.
- ❖ الحساب التكاملي.
- ❖ العلوم الفيزيائية و علوم الحياة و الأرض.

I)- دالة أصلية لدالة على مجال

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن $\mathbb{R}$.
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I، كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث $F' = f$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + 2$.

- الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ هي دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.
- الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + -2$ هي أيضا دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.

خاصية1

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ، و F دالة أصلية لها على I.
الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto F(x) + k$, $(k \in \mathbb{R})$.

برهان

لدينا F دالة أصلية للدالة f على مجال I.

- إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على I فإن G قابلة للاشتقاق على I ولدينا $G' = f$
إذن $G' = F'$ أي $(G - F)' = 0$ على I و منه $\exists k \in \mathbb{R} / G - F = k$. أي: $\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$.
- عكسيا إذا كانت G دالة معرفة على I بما يلي: $G(x) = F(x) + k$، حيث $k \in \mathbb{R}$ فإن G قابلة للاشتقاق على المجال I و لدينا $G' = F' = f$، و منه G دالة أصلية للدالة f على المجال I.

خاصية2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I، و $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$.
إذا كانت f تقبل دالة أصلية على I فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I تحقق $G(x_0) = y_0$.

تمرين01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I =]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + 1$.

1) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.
2) – حدد الدالة الأصلية G للدالة f على المجال I التي تحقق $G(1) = 0$.

خاصية3

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية على I.

خاصية4

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ، و $k \in \mathbb{R}$.
إذا كانت F و G على التوالي دالتين أصليتين للدالتين f و g على I فإن:
- ❖ الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
- ❖ الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I.

تمرين02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x\le 1 \\ -x+4, x>1 \end{cases}$.

1) – بين أن الدالة f تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$.
2) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
3) – حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$ التي تحقق $G(0)=0$.

II)- جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f معرفة على مجال I	الدوال الأصلية ل f على المجال I	المجال I
$x \mapsto a, (a\in\mathbb{R})$	$x \mapsto ax+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto x^n, (n\in\mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, (n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+c, (c\in\mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto x^r, (r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c, (c\in\mathbb{R})$	$]0,+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x+c, (c\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$
$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$x \mapsto \tan x+c, (c\in\mathbb{R})$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$

III)- الدوال الأصلية و العمليات

ملاحظات	الدوال الأصلية ل f على المجال I	الدالة f معرفة على مجال I
u لا تنعدم على I	$x \mapsto \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^n,(n\in\mathbb{N}^*)$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto -\frac{1}{u(x)}+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^2(x)}$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^r,(r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$
	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
	$x \mapsto u(x)+v(x)+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)+v'(x)$
	$x \mapsto u(x)v(x)+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$
	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$
	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)+c,(c\in\mathbb{R})$	$x \mapsto u'(ax+b),a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}$
	$t \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$	$t \mapsto \cos(\omega t+\varphi),\omega\in\mathbb{R}^*,\varphi\in\mathbb{R}$
	$t \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$	$t \mapsto \sin(\omega t+\varphi),\omega\in\mathbb{R}^*,\varphi\in\mathbb{R}$

تمرين04

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي: $f(x)=x\cos x-\sin x$.

1) – أحسب $f'(x)$ لكل x من $[0,\pi]$.

2) – أ- استنتج الدوال الأصلية للدالة g المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي: $g(x)=x\sin x-\cos x$

ب- حدد الدالة الأصلية G للدالة g التي تحقق الشرط البدئي $G(\pi)=0$.

تمرين05

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي: $f(x)=\tan^2 x$ و $g(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

❖ حدد الدوال الأصلية لكل من الدالتين f و g على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

تمرين06

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1) – حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $\forall x\in[0,+\infty[, f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2) – استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

3) – استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $[0,+\infty[$ التي تحقق: $F(1)=\dfrac{5}{2}$.

تمرين07

حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

$I=\mathbb{R}, f(x)=3x^4-3x^2+x-1$

$I=]-\infty,-1[, f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)}$

$I=]1,+\infty[, f(x)=x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$

$I=[2,+\infty[, f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$I=]0,+\infty[, f(x)=x^2+x\sqrt[3]{x^2+1}$

$I=]-\infty,+\infty[, f(x)=\cos x\sin^4 x$

تمرين08

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

1) – بين أن $\forall x\in[1,+\infty[, f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}$.

2) – حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[1,+\infty[$

3) – استنتج الدالة الأصلية F للدالة f التي تحقق $F(1)=2$.